

NOMBRES EN ECRITURE FRACTIONNAIRE

I. Quotient de deux nombres, priorités de calcul et distributivité :

1) Quotient de deux nombres entiers :

Définition :

Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$

- Le **quotient de a par b** est le nombre qui, multiplié par b , donne a .
- Ce quotient se note $a : b$, $a \div b$, $\frac{a}{b}$ ou a/b
- La notation $\frac{a}{b}$ est appelée **écriture fractionnaire** du quotient de a par b .

Remarques :

- Un quotient admet toujours une écriture fractionnaire alors qu'il n'admet pas toujours une écriture décimale.
- Une fraction est un quotient de deux nombres entiers.
- Si a est un nombre décimal non nul alors $\frac{a}{a} = 1$ et $\frac{a}{1} = a$

2) Vocabulaire :

Définition :

Dans l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ du quotient de a par b , le nombre a est appelé **numérateur** et le nombre b est appelé **dénominateur**.

Exemple :

Pour le quotient $\frac{2,8}{7}$, le numérateur est 2,8 et le dénominateur est 7.

3) Conventions de priorités entre opérations :

Convention :

Dans une expression, on effectue d'abord les **calculs entre les parenthèses** les plus intérieures, puis les **multiplications et les divisions de gauche à droite** et, enfin, les **additions et les soustractions de gauche à droite**.

Exemple :

Calculer l'expression $A = 5 + 3 \times (6 + 4) - 7$

$A = 5 + 3 \times (6 + 4) - 7$ On effectue les calculs entre parenthèses.

$A = 5 + 3 \times 10 - 7$ On effectue les multiplications.

$A = 5 + 30 - 7$ On effectue les additions et les soustractions de gauche à droite.

$A = 35 - 7$

$A = 28$

4) Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition et la soustraction :

Propriété :

Multiplier une somme (ou une différence) par un nombre revient à multiplier chaque terme de la somme (ou de la différence) par ce nombre.

Autrement dit, pour tous nombres a , b et k :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Remarque : On dit que la multiplication est distributive par rapport à l'addition et la soustraction.

Preuve :

Admise.

Exemple :

$$A = 3 \times (5 + 2)$$

$$A = 3 \times 5 + 3 \times 2$$

$$A = 15 + 6$$

$$A = 21$$

$$B = 5 \times (9 - 2)$$

$$B = 5 \times 9 - 5 \times 2$$

$$B = 45 - 10$$

$$B = 35$$

II. Définitions et propriétés :

1) Écritures fractionnaires d'un même nombre :

Propriété :

Un quotient **ne change pas** quand on multiplie (ou quand on divise) son numérateur et son dénominateur par un même nombre relatif non nul.

Autrement dit,

Si a , b et c sont des nombres quelconques avec $b \neq 0$ et $c \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$$

.....

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div c}{b \div c}$$

Preuve :

Le but est de montrer que $\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}$

Soient a , b et c des nombres relatifs (avec b et c non nuls)

Par définition, $\frac{ac}{bc}$ est le nombre q tel que $bc \times q = ac$

$$\text{Or, } bc \times \frac{a}{b} = b \times c \times \frac{a}{b} = c \times a = ac$$

Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{b}$ (Ce qui prouve l'égalité)

Remarque :

- Cette propriété permet de **simplifier l'écriture** d'un quotient en divisant le numérateur et le dénominateur par le même nombre.
- Elle permet aussi d'**écrire deux quotients avec le même dénominateur**.

Exemples :

- Simplifier la fraction suivante :

$$\frac{90}{36} = \frac{90 \div 2}{36 \div 2} = \frac{45}{18} = \frac{45 \div 9}{18 \div 9} = \frac{5}{2}$$

- Transformer le quotient suivant en fraction égale :

$$\frac{3}{4,5} = \frac{3 \times 2}{4,5 \times 2} = \frac{6}{9}$$

- Mettre ces deux quotients au même dénominateur :

$$\frac{5}{2} = \frac{5 \times 7}{2 \times 7} = \frac{35}{14}$$

$$\frac{-11}{7} = \frac{-11 \times 2}{7 \times 2} = \frac{-22}{14}$$

2) Comparaison de nombres en écriture fractionnaire :**Propriété :**

Pour comparer des nombres en écriture fractionnaire,

- On les écrit avec le **même dénominateur**.
- Puis on les **range dans le même ordre que leurs numérateurs**.

Preuve :

Admise

Remarque :

- Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est supérieur à son dénominateur alors il est supérieur à 1.
- Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est inférieur à son dénominateur alors il est inférieur à 1.

Exemple :

Comparer les nombres $\frac{5}{7}$ et $\frac{3}{4}$

- Mise au même dénominateur : Le dénominateur commun est ici égal à 28

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 4}{7 \times 4} = \frac{20}{28}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 8}{4 \times 8} = \frac{24}{28}$$

- Comparaison :

Comme $24 > 20$ alors $\frac{24}{28} > \frac{20}{28}$

Autrement dit, $\frac{3}{4} > \frac{5}{7}$

III. Opérations sur les nombres en écriture fractionnaire :

1) Additions et soustractions :

Propriété :

Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire :

- On écrit les nombres avec le **même dénominateur**
- On **additionne (ou on soustrait)** les numérateurs et on garde le dénominateur commun

Autrement dit,

Si a, b et c sont des nombres quelconques avec $c \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

.....

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Preuve :

$$\text{Preuve : } \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Soient a, b et c des nombres relatifs (avec c non nul)

Par définition, $\frac{a}{c}$ est le nombre q_1 tel que $q_1 \times c = a$ et $\frac{b}{c}$ est le nombre q_2 tel que $q_2 \times c = b$

Egalité n°1

Egalité n°2

D'autre part, comme $\frac{a+b}{c}$ est le nombre q tel que $q \times c = a+b$

Et que $(q_1 + q_2) \times c = q_1 \times c + q_2 \times c = a+b$

D'après la propriété de **distributivité de la multiplication sur l'addition**

D'après les **deux égalités précédentes**

Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$ (Ce qui prouve l'égalité)

$$\text{Preuve : } \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Même type de raisonnement.

Exemple :

Effectuer le calcul suivant $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$

- Mise au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{9}{6}$$

- Calcul :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4}{6} + \frac{9}{6} = \frac{4+9}{6} = \frac{13}{6}$$

2) Multiplications :

Propriété :

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les **numérateurs entre eux** et les **dénominateurs entre eux**.

Autrement dit,

Si a, b, c et d sont des nombres quelconques avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$ alors :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Preuve :

Preuve : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Soient a, b, c et d des nombres relatifs (avec b et d non nuls)

Par définition, $\frac{a}{b}$ est le nombre q_1 tel que $q_1 \times b = a$ et $\frac{c}{d}$ est le nombre q_2 tel que $q_2 \times d = c$

Egalité n°1

Egalité n°2

D'autre part, comme $\frac{ac}{bd}$ est le nombre q tel que $q \times bd = ac$

Et que $(q_1 \times q_2) \times bd = q_1 \times b \times q_2 \times d = a \times c$

Car on peut **modifier l'ordre des facteurs** dans une multiplication

D'après les **deux égalités précédentes**

Donc le nombre q recherché est $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$ (Ce qui prouve l'égalité)

Exemple :

Effectuer le calcul suivant $\frac{2}{3} \times \frac{4}{7}$:

$$\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{2 \times 4}{3 \times 7} = \frac{8}{21}$$

3) Prendre une fraction d'un nombre :

Définition :

Prendre une fraction d'un nombre, c'est multiplier cette fraction par ce nombre.

Exemple :

Pour déterminer les $\frac{2}{3}$ d'une mise de 81 €, il faut effectuer le calcul : $81 \times \frac{2}{3} = 54$